ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MEUNGKHAM KEOPHOUVONG

BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP HAI TUYẾN TÍNH VỚI DẠNG ĐẶC TRƯNG KHÔNG ÂM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MEUNGKHAM KEOPHOUVONG

BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP HAI TUYẾN TÍNH VỚI DẠNG ĐẶC TRƯNG KHÔNG ÂM

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

Thái Nguyên - Năm 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết luận văn

Meungkham KEOPHOUVONG

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của **TS. Nguyễn Thị Ngân** em xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến cô.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy giáo, cô giáo trong trường Đại học Sư Phạm – Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô giáo tham gia giảng dạy khóa học 2015-2017 những người đã đem hết tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho chúng tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm.

Và cuối cùng, xin gửi lời biết ơn bố mẹ, cảm ơn gia đình, cảm ơn các đồng nghiệp, bạn bè đã luôn đồng hành giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu cũng như trong quá trình thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết luận văn

Meungkham KEOPHOUVONG

Mục lục

MỞ ĐẦU

Bộ môn phương trình đạo hàm riêng hay phương trình Vật lý toán là một bộ môn toán học cơ bản vừa mang tính lý thuyết cao vừa mang tính ứng dụng rộng. Ngành toán học này đã góp phần xây dựng lý thuyết chung cho các ngành toán học và các khoa học khác. Phương trình elliptic xuất hiện khi nghiên cứu các quá trình không thay đổi về thời gian (quá trình dừng), phương trình hyperbolic và parabolic xuất hiện khi nghiên cứu các quá trình có thay đổi về thời gian (quá trình không dừng). Để xác định nghiệm của các loại phương trình này người ta phải xây dựng các điều kiện ban đầu, điều kiện biên. Điều kiện ban đầu cho biết trạng thái tại thời điểm $t = 0$, điều kiện biên cho biết quá trình xảy ra ở các biến không gian. Bài toán tìm nghiệm của phương trình đối với điều kiện biên đã cho được gọi là bài toán biên.

Từ chỗ thấy được vai trò rất quan trọng và cần thiết của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng và mong muốn được hiểu sâu, hiểu kỹ về phương trình đạo hàm riêng đặc biệt là phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính nên em chọn đề t ài "Bài toán biên thứ nhất đối với phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính với dạng đặc trưng không âm" để nhằm mục đích nghiên cứu về khái niệm một số tính chất cơ bản của phương trình đạo hàm riêng và trình bày tổng quan lý thuyết các vấn đề về bài toán biên thứ nhất đối với phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính với dạng đặc trưng không âm. Luận văn gồm có hai chương với nội dung cụ thể như sau:

Chương1: Trình bày một số kiến thức cơ bản các không gian Sobolev như $H^1(\Omega)$, $H^1_{loc}(\Omega)$, $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, $H^{1,0}(Q_T)$, $\overset{0}{H}{}^{1,0}(Q_T)$, bài toán biên thứ nhất đối với phương trình elliptic và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình parabolic.

Chương 2: Trình bày về bài toán biên thứ nhất đối với phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính với dạng đặc trưng không âm, sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán biên này. Bài toán biên thứ nhất của phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính với dạng đặc trưng không âm chứa bài toán biên của phương trình elliptic và parabolic như những trường hợp đặc biệt.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Sobolev, bài toán biên thứ nhất đối với phương trình elliptic và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình parabolic. Nội dung chủ yếu của chương này được tham khảo từ các tài liệu [2] , [3] , [4] .

1.1. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Ta kí hiệu Ω là một miền bị chặn trong không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ với $\partial\Omega$ là biên của miền này.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là một điểm của không gian $\mathbb{R}^n$.

$D_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ là toán tử lấy đạo hàm riêng theo biến x_i.

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là tập hợp các chỉ số, trong đó α_i là các số nguyên không âm và $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Khi đó

$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} ... D_{x_n}^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$. Để cho đơn giản, đôi khi ta dùng kí hiệu:

$u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ để chỉ đạo hàm riêng cấp hai của hàm u.

Định nghĩa 1.1. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng:

$$Ł(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x) , \qquad (1.1)$$

trong đó f là một hàm (hoặc một véctơ hàm) đã biết trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n, u$ là hàm ẩn, L là một toán tử vi phân tuyến tính trong $\Omega, [a_{\mathrm{ij}}(x)]$ là ma trận gồm các hệ số của đạo hàm cấp hai của toán tử L thỏa mãn:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \ i, j = \overline{1, n}.$$

Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Khi nghiên cứu phương trình vi phân tuyến tính đạo hàm riêng nói chung và phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính nói riêng người ta chia làm ba loại phương trình cơ bản: phương trình elliptic, phương trình hyperbolic và phương trình parabolic. Xét phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai (1.1).

Đặt $A(x) = [a_{ij}(x)]$, $a_{ij}(x)$ được coi là thực $i, j = \overline{1, n}$.

Giả sử $x_0 \in \Omega$ là một điểm tùy ý, $\lambda_1(x_0), \lambda_2(x_0), ..., \lambda_n(x_0)$ là các giá trị riêng thực của ma trận $A(x_0)$.

Ta kí hiệu $n^+ = n^+(x_0)$ là số các giá trị riêng dương $n^- = n^-(x_0)$ là số các giá trị riêng âm và $n^0 = n^0(x_0)$ là số các giá trị riêng bằng không,

$$n = n^+ + n^- + n^0.$$

Khi đó:

$*$ Phương trình (1.1) được gọi là phương trình elliptic tại điểm x_0 (hoặc elliptic tại điểm x_0) nếu $n^+ = n$ hoặc $n^- = n$.

$*$ Phương trình (1.1) được gọi là phương trình hyperbolic tại điểm x_0 (hoặc hyperbolic tại điểm x_0) nếu $n^+ = n - 1$ và $n^- = 1$ hoặc $n^+ = 1$ và $n^- = n - 1$.

$*$ Phương trình (1.1) được gọi là phương trình parabolic tại điểm x_0 (hoặc parabolic tại điểm x_0) nếu $n_0 > 0$.

$*$ Phương trình (1.1) được gọi là phương trình elliptic, hyperbolic và parabolic trên tập Ω nếu tương ứng nó elliptic, hyperbolic và parabolic tại mỗi điểm của miền Ω.

Ví dụ. Xét phương trình Traphigin (n=2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a(x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x),$$